

სუპერსრულყოფილი ჯგუფების მინიმალური უნივერსალური ჯვარედინი გაფართოებები

ნიკა ლოგუა

ელ-ფოსტა: nika.logua754@ens.tsu.edu.ge

მათემატიკის დეპარტამენტი, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
უნივერსიტეტის ქ.2, თბილისი 0177, საქართველო

ჰომოლოგიური ალგებრის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ფაქტია, რომ ყოველ სრულყოფილ ჯგუფს G , ე. ი. ისეთს, რომლის პირველი ჰომოლოგიის ჯგუფი $H_1(G)$ ტრივიალურია, გააჩნია უნივერსალური ცენტრალური გაფართოება $H_2(G)$ -თი.

კიდევ ერთი ფუნდამენტური ფაქტია, რომ მესამე კოჰომოლოგიური ჯგუფი $H^3(G; M)$ აკლასიფიცირებს ჯვარედინ გაფართოებებს

$$0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow G \rightarrow 1$$

სადაც $\partial: X \rightarrow Y$ არის ჯვარედინი მოდული, ხოლო G -ს მოქმედება M -ზე მოიცემა G -მოდულის სტრუქტურით. თუ ეს მოქმედება ტრივიალურია და G სუპერსრულყოფილია, ე. ი. $H_1(G)$ და $H_2(G)$ ორივე ტრივიალურია, მაშინ $H^3(G; M)$ იზომორფული ხდება $\text{Hom}(H_3(G), M)$ -ის, ასე რომ არსებობს G -ს უნივერსალური ჯვარედინი გაფართოება $H_3(G)$ -თი.

თუმცა $H_3(G)$ -თი განსაზღვრული უნივერსალური ჯვარედინი გაფართოება უნივერსალური ცენტრალური გაფართოებისგან განსხვავებით უკვე აღარ არის ერთადერთი. მისთვის არსებობს ინიციალური წარმომადგენელი, რომელშიც Y თავისუფალი ჯგუფია, ხოლო X თავისუფლად (გარკვეული აზრით) არის აგებული Y -ითა და $H_3(G)$ -ს უნივერსალური კოცკლით, მაგრამ არსებობს სხვებიც. ჰოლტის კლასიკური ნაშრომიდან გამომდინარეობს, რომ თუ G სასრულია, მაშინ არსებობს წარმომადგენელი, რომლისთვისაც Y სასრულია და ასევე X სასრული აბელური ჯგუფია. სინამდვილეში X -ად შეიძლება ავიღოთ ინდუცირებული G -მოდული $H_3(G)[G]$.

ამასთან დაკავშირებით ბუნებრივად ისმება კითხვა, არსებობს თუ არა უმცირესი წარმოდგენა, ანუ ისეთი, რომელიც ნებისმიერი სხვა წარმოდგენის ფაქტორჯგუფია. მართლაც, ჩვენ ვნახავთ, რომ ნებისმიერი ისეთი Y -ქვეჯგუფისთვის $Z \subset X$ ისეთი რომ $M \cap Z = 0$ რომელიც შესაძლებელია შემდგომი დაყვანა $X/Z \rightarrow Y/\partial(Z)$ -ზე, შესაბამისად, თუ უმცირესი წარმომადგენელი არსებობს, მაშინ არსებობს უდიდესი Z პირობით $M \cap Z = 0$.

ჩვენი მთავარი შედეგია, რომ ასეთი უდიდესი Z შეიძლება არც არსებობდეს. კერძოდ, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ როდესაც G არის მათიეს M_{11} ჯგუფი, არსებობს ორი განსხვავებული მაქსიმალური ქვემოდული $Z \subset H_3(G)[G]$ პირობით $H_3(G) \cap Z = 0$. როგორც შედეგი, ჩვენ გამოგვაქვს დასკვნა, რომ უნივერსალური ჯვარედინი გაფართოებისთვის ზემოთ მოყვანილი აზრით უმცირესი წარმომადგენელი ზოგად შემთხვევაში არ არსებობს.